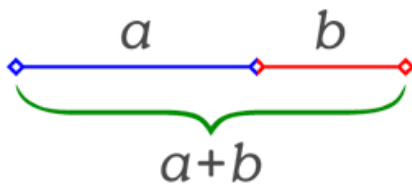


Az aranymetszésről

A címbeli fogalomról sokszor csak maszatolnak; néha nem lehet megkerülni a pontosabb megfogalmazást. Most erről lesz szó. Ez a középiskolai szakrajz tanítása során is felmerül. Sok minden olvasható erről az interneten is. Pl. a *Wikipediából* vettük az alábbi mondatot:

Az **aranymetszés** vagy **aranyarány** egy olyan [arányosság](#), ami a természetben és művészetben is gyakran megjelenik, természetes egyensúlyt teremtve a szimmetria és az aszimmetria között.

Nem hisszük, hogy ezzel sokkal előrébb jutottunk. Kellenek a konkrétumok is. Például az 1. ábra már lényegesebb információkhoz juttat.



Definíció szerint:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b} \quad (1)$$

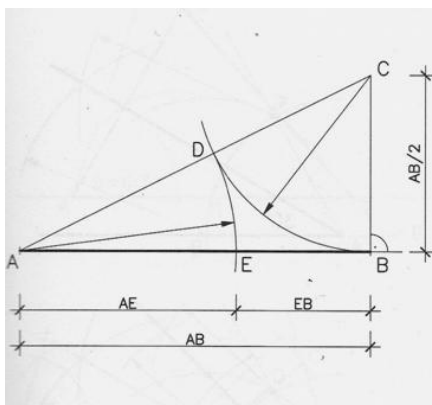
1. ábra – forrása: [1]

Szavakkal: ha egy szakaszt az aranymetszés szerint osztottunk két részre, akkor a kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbikhoz, ahogyan a nagyobbik aránylik a teljes szakaszhosszhoz.

A gyakorlati feladat: egy szakasz két részre osztása az (1) arány szerint. Ez megoldható szerkesztéssel és számítással is.

Szerkesztés

Ez a 2. ábra szerinti.



Szakasz felosztása aranymetszés szerint

1. Adott AB szakasz. Vegyük fel az ABC háromszöget. A nagyobbik befogó (AB) hossza kétszerese a kisebbik befogó (BC) hosszának.
2. A körzőt C pontba szúrva és a BC szakaszt körző nyílásba véve körívet húzunk úgy, hogy elmetssze az AC szakaszt (átfogót). A kapott metszéspont D-vel jelöljük.
3. Ezután a körzőt A pontba szúrjuk és az AD szakaszt körző nyílásba véve körívet húzunk úgy, hogy elmetssze az AB szakaszt. A kapott metszéspont (E) az AB szakaszt az aranymetszésnek megfelelő arányban osztja a szakaszt két részre ($AB : AE = AE : EB$).

2. ábra – forrása: [2]

Számítás

Itt [1] szerint járunk el. Legyen az 1. ábra szerinti jelölésekkel:

$$a = \Phi \cdot b \rightarrow \Phi = \frac{a}{b}, \quad \Phi > 1! \quad (2)$$

Képezzük (1) reciprokát:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}; \quad (3)$$

(3) jobb oldalán a tört számlálóját és nevezőjét is elosztjuk **b** - vel:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}}; \quad (4)$$

most (2) és (4) szerint:

$$\Phi = \frac{\Phi+1}{\Phi}; \quad (5)$$

rendezve:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0. \quad (6)$$

Ezt a másodfokú egyenletet a megoldó - képlettel megoldva:

$$\Phi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad (7)$$

mivel (2) szerint Φ két szakaszhoz aránya, így az csak pozitív szám lehet, ezért (7) - ben a + előjel választandó:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618. \quad (8)$$

Most számítsuk ki **a** és **b** értékét az $s = a + b$ - vel! Először (2), (3) és (8) - cal:

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{s}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad (9)$$

innen:

$$a = \frac{2 \cdot s}{1+\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot s}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot s \cdot (1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot s \approx 0,618 \cdot s, \quad \text{tehát:}$$

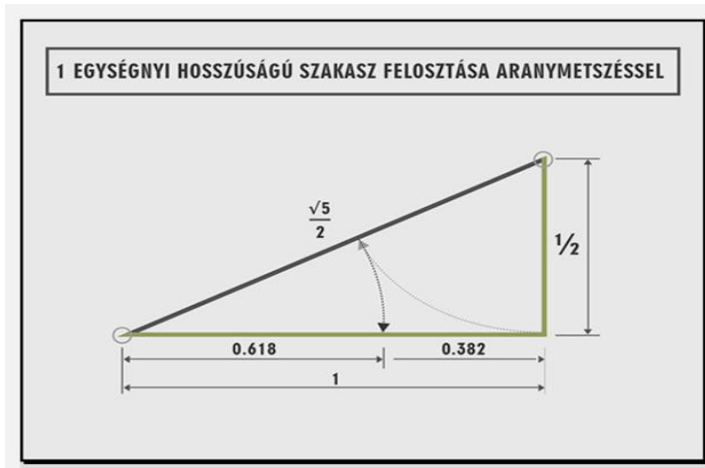
$$\underline{a \approx 0,618 \cdot s}; \quad (10)$$

ezután:

$b = s - a \approx s - 0,618 \cdot s = 0,382 \cdot s$, tehát:

$$\underline{b \approx 0,382 \cdot s.} \quad (11)$$

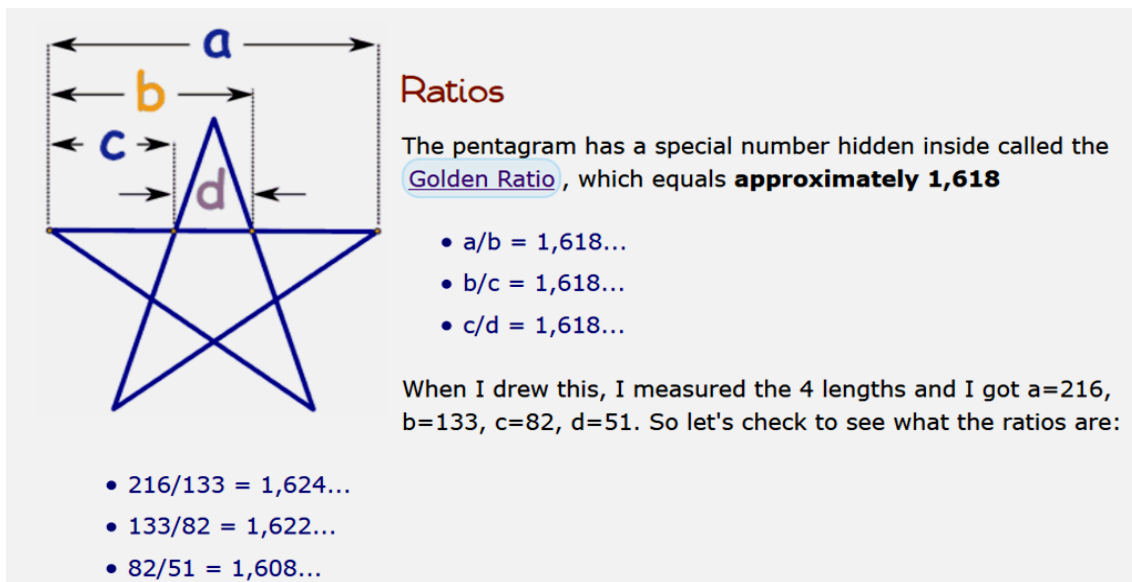
A 3. ábra $s = 1$ esetére mutatja az eredményeket.



3. ábra – forrása: [3]

A 3. ábrán feltüntetett eredmények igazolják a 2. ábra szerinti szerkesztést is.

Az interneten találtuk a 4. ábrát, mely az ötagú csillag és az aranyarány kapcsolatára mutat rá, mint síkgeometriai példa.

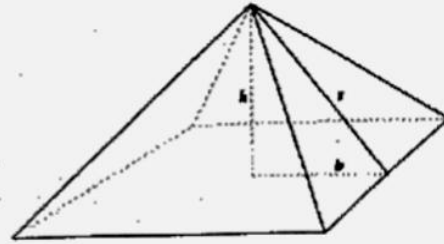


4. ábra – forrása: [4]

Egy térgeometriai példa a Kheopsz - piramis esete; ez az 5. ábrán szemléltethető.

Megfigyelhető, hogy egy oldallap magassága (s) és az alapjának fele (b) között fennáll az $s/b=(s+b)/s$ egyenlet, ami éppen az aranymetszés szabálya

Egyetlen gond, hogy Egyiptomban ezt szinte biztosan nem ismerték



A piramis magasságának négyzete az oldalak területével azonos

Az ábra jelöléseivel: $h^2=s \cdot b$

A Pitagorasz-tételből következően $h^2=s^2-b^2$

A két egyenletből $s \cdot b=s^2-b^2$

Némi átrendezés után $s^2=b \cdot (s+b)$, amiből pedig mindkét oldal $s \cdot b$ -vel való osztása után megkapjuk az $s/b=(s+b)/s$ összefüggést

5. ábra – forrása: [5]

Szóval: ha tanuljuk / tanítjuk az aranymetszést, akkor ne legyünk restek alkalmazási példákat / lehetőségeket is venni / bemutatni!

Megjegyzések:

M1. Az 5. ábra esetében fordított utat követve: ha $s/b = \Phi$, akkor $h^2 = sb$.

M2. Érdekes lehet az 5. ábrán a piramis oldalainak dőlésszöge. Erre: $\cos \alpha = b/s = 1/\Phi$.

M3. Nem lehet nem észrevenni [5] szerzőjének tanácstalanságát abban a vonatkozásban, hogy hogyan tudtak az ókori egyiptomi építők ilyen elképesztő dolgokat művelni. Sokan lehetünk még ezzel így...

Források:

[1] – <https://hu.wikipedia.org/wiki/Aranymetsz%C3%A9s>

[2] – *Ágfalvi Flóra ~ Bársony István ~ Szerényi István*: Faipari szakrajz
Szega Books Kft., Pécs, 2012., 33. o.

[3] –

<http://elte.prompt.hu/sites/default/files/tananyagok/VizualizacioATudomanykommunikaciban/ch06s03.html>

[4] – <http://www.mathsisfun.com/geometry/pentagram.html>

[5] – http://materd.uw.hu/08_05.html

Összeállította: ***Galgóczy Gyula***
mérnökstanár

Sződliget, 2016. 12. 03.